Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Dantzer
Dreveton
Gourdon (dev 1)
Rouvière (dev 2)

On se place dans le cadre de suites numériques donc à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Autour de la convergence de suites numériques

1. Limite d'une suite [Dan]

Définition 1.1 On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si elle vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Proposition - Définition 1.2 Si $(u_n)_n$ converge vers un élément $\ell \in \mathbb{K}$, cet élément est unique. On l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exemple 1.3
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ alors la suite $(z^n)_n$ converge vers 0

Définition 1.4 Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Définition 1.5 Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant m$ (resp. $u_n \leqslant m$).

Lemme 1.6 Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}\, u_n)_n$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)_n$ convergent.

Proposition 1.7 Une suite convergente est bornée.

2. Valeurs d'adhérence d'une suite [Dre]

Définition 1.8 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On appelle sous-suite (ou suite extraite) de $(u_n)_n$ toute suite $(v_n)_n$ de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante (appelée extractrice).

Exemples 1.9
les suites $(u_{2n+1})_n$, $(u_{3n})_n$, $(u_{n^2})_n$ sont des suites extraites de $(u_n)_n$

Proposition 1.10 Si une suite converge vers ℓ alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.

Proposition - Définition 1.11 Soient $(u_n)_n$ une suite numérique et $\ell \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ℓ est limite d'une sous-suite de $(u_n)_n$
- $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \ell| < \varepsilon\} = +\infty$

On dit, le cas échéant que ℓ est une valeur d'adhérence. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut étendre cette notion avec $\ell = \pm\infty$.

Proposition 1.12 Une suite convergente admet exactement une valeur d'adhérence.

Contre-exemple 1.13
$(n^{(-1)^n})_n$ admet 0 comme seule valeur d'adhérence et diverge

Proposition 1.14 L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geqslant k\}}$.

3. Suites de Cauchy

Définition 1.15 On dit que $(u_n)_n$ est de Cauchy (ou que $(u_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy) si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N, |x_p - x_q| < \varepsilon$.

Proposition 1.16 Par complétude de $\mathbb{K}$, une suite numérique $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.

II - Outils d'étude des suites numériques

1. La notion de limsup/liminf [Dan]

Lemme 2.1 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Alors $(\sup_{k\geq n} u_k)_n$ est croissante et $(\inf_{k\geq n} u_k)_n$ est décroissante, elles admettent donc des limites (éventuellement infinies).

Définition 2.2 On appelle limite supérieure (resp. inférieure) de $(u_n)_n$, la valeur $\limsup u_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k$ (resp. $\liminf u_n := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k$).

Exemple 2.3
soit $(u_n)_n = ((-1)^n)_n$ alors : $\limsup u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$

Proposition 2.4 La valeur limsup (resp. liminf) est la plus grande (resp. plus petite) valeur d'adhérence de la suite.

Corollaire 2.5 Pour toute suite réelle $(u_n)_n$, $\liminf u_n \leq \limsup u_n$ avec égalité si et seulement si $(u_n)_n$ admet une limite (éventuellement infinie).

2. Comportement asymptotique

Définition 2.6 (notations de Landau) Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ des suites réelles. On note alors :

- $u_n = O(v_n)$ si : $\exists p \in \mathbb{N}, \exists m > 0, \forall n \geq p, |u_n| \leq m.|v_n|$
- $u_n = o(v_n)$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$
- $u_n \sim v_n$ si : $u_n - v_n = o(v_n)$

Exemples 2.7

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \gamma + \log n$
- $\sum_{i=0}^{j} n^i \sim n^j$

Proposition 2.8 (moyenne de Césaro) Soit $(u_n)_n$ une suite numérique convergeant vers ℓ, éventuellement infini, alors : $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_n$ converge vers ℓ.

Contre-exemple 2.9
$\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right)_n$ a une moyenne de Césaro égale à $\frac{1}{2}$ mais $((-1)^n)_n$ ne converge pas vers $\frac{1}{2}$

Exemple 2.10
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \#\{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n\}$
Alors :
$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

développement 1

III - Applications de suites

1. Suites récurrentes et points fixes

Définition 3.1 Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrente s'il existe $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 3.2 Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente associée à une fonction $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si f est continue et si $(u_n)_n$ converge vers un élément $\ell \in \mathbb{K}$, alors ℓ est un point fixe de f.

Application 3.3 (Méthode de Newton) Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors :

(i) f s'annule en un unique point a et il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x_0 \in I = [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a

(ii) si de plus $f'' > 0$ alors cela reste vrai pour $I = [a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

développement 2

Exemple 3.4 (méthode de Héron)
$x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$ converge vers $\sqrt{y}$

2. Suites et topologie [DRE]

Proposition 3.5 Un ensemble est fermé si et seulement si c'est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite.

Proposition 3.6 Soit $A \subset \mathbb{K}$. Alors : $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.

Exemple 3.7

$\overline{\mathbb{R}_+^*} = \mathbb{R}_+$ $\qquad \overline{\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}} = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Corollaire 3.8 Une partie A est dense si et seulement si tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite à valeurs dans A.

Exemples 3.9

$\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Théorème 3.10 (Bolzano - Weierstrass) De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$, on peut extraire une sous-suite convergente (vers une limite finie).

Corollaire 3.11 Une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exemple 3.12

soit $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = \cos u_n$

Alors $(u_n)_n$ converge.